

Zapraszam na zajęcia on-line sobota, niedziela 7 – 8 .11 (5 godzin obecności) zgodnie z planem lekcji

Instrukcja logowania: proszę skopiować do paska adresów poniższy adres:

<https://meet.google.com/wcu-okge-rue> i wcisnąć enter

Mam nadzieję, że uda się Państwu dołączyć do spotkania (posiadacze konta na szkolnej poczcie wchodzi bez problemów, pozostałe osoby po zaakceptowaniu przez prowadzącego. Gdyby ktoś miał problem proszę zgłosić opiekunowi semestru lub wicedyrektorowi (arnold.sidor@ckziu1.edu.pl)

BS sem. I -3 zjazd **TEMAT: Nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą (2 godz.)**

Równania wyższych stopni – rozwiązywanie równań zapisanych w postaci iloczynu czynników oraz równań postaci $x^3 = 64$, $(x - 5)^3 = 64$ itp. (1 godz.). Równania wymierne (prowadzące do równań liniowych lub

kwadratowych typu: $\frac{x-5}{2x+3} = 4$, $\frac{x^2+7}{2x} = 4x$)(2 godz.)

TEMAT: NIERÓWNOŚCI KWADRATOWE <https://www.youtube.com/watch?v=IQYG4MQ9I-o>

Rozwiązanie nierówności z niewiadomą x polega na wyznaczeniu tych wartości x , dla których nierówność jest spełniona. Zbiór tych x nazywamy zbiorem rozwiązań nierówności.

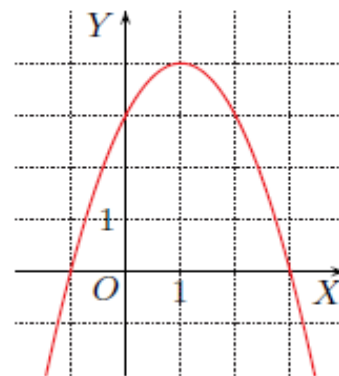
Znając wykres funkcji kwadratowej i jej miejsca zerowe, możemy wyznaczyć zbiór rozwiązań odpowiedniej nierówności kwadratowej.

Przykład 1

Rozwiąż nierówność $-x^2 + 2x + 3 > 0$.

Z wykresu funkcji $y = -x^2 + 2x + 3$ (rysunek obok) odczytujemy, że $-x^2 + 2x + 3 > 0$ dla $x \in (-1; 3)$.

Uwaga. Zauważ, że do rozwiązywania nierówności kwadratowej nie potrzebujemy dokładnego wykresu odpowiedniej funkcji, wystarczy znajomość jej miejsc zerowych i informacja o tym, czy ramiona paraboli, będącej wykresem tej funkcji, są skierowane w górę, czy w dół.



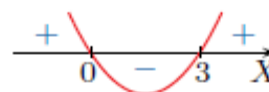
Przykład 2

Rozwiąż nierówność.

a) $2x^2 - 6x > 0$

W celu wyznaczenia miejsc zerowych funkcji $y = 2x^2 - 6x$ rozwiązujemy równanie $2x^2 - 6x = 0$, czyli $2x(x - 3) = 0$. Zatem $x = 0$ lub $x = 3$.

Rozwiązania równania zaznaczamy na osi OX . Szkicujemy parabolę o ramionach skierowanych do góry (współczynnik przy x^2 jest dodatni), przechodzącą przez zaznaczone punkty. Z wykresu odczytujemy: $2x^2 - 6x > 0$ dla $x \in (-\infty; 0) \cup (3; \infty)$.



1. Rozwiąż nierówności:

a. $x^2 + 6x + 9 < 0$

b. $-2x^2 + 3x + 5 \geq 0$

c. $2x < x^2$

d. $x^2 \leq 2$

e. $x^2 - 6x + 10 > 0$

f. $-x^2 + 2x - 1 \geq 0$

g. $x^2 + 6x + 9 \leq 0$

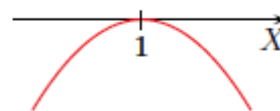
h. $4x > x^2 + 4$

Przykład 3

Rozwiąż nierówność $-x^2 + 2x - 1 \geq 0$.

Rozwiązujemy równanie $-x^2 + 2x - 1 = 0$, czyli $-(x - 1)^2 = 0$. Zatem $x = 1$ (jest to pierwiastek podwójny). Rozwiązanie równania zaznaczamy na osi OX i szkicujemy parabolę o ramionach skierowanych w dół.

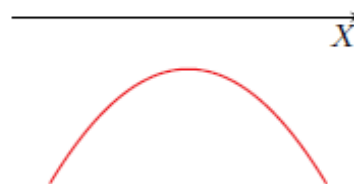
Z wykresu odczytujemy: $-x^2 + 2x - 1 \geq 0$ dla $x = 1$.



b) Rozwiąż nierówność $-3x^2 + 2x - 1 < 0$.

$$\Delta = 4 - 4 \cdot (-3) \cdot (-1) = -8 < 0$$

Współczynnik przy x^2 jest ujemny oraz równanie $-3x^2 + 2x - 1 = 0$ nie ma pierwiastków. Parabola znajduje się zatem pod osią OX , a to oznacza, że nierówność jest prawdziwa dla dowolnego x , czyli $x \in \mathbf{R}$.

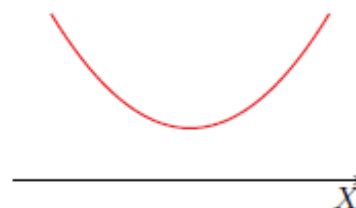


Przykład 4

a) Rozwiąż nierówność $5x^2 - 3x + 2 < 0$.

$$\Delta = 9 - 4 \cdot 5 \cdot 2 = -31 < 0$$

Współczynnik przy x^2 jest dodatni oraz równanie $5x^2 - 3x + 2 = 0$ nie ma pierwiastków. Parabola znajduje się zatem nad osią OX , a to oznacza, że nierówność jest sprzeczna.



2. Rozwiąż nierówności:

a. $x^2 - 6x + 8 > 0$

e. $6x^2 \leq x + 2$

b. $9x^2 + 16 < 0$

f. $4x^2 + 2x + 1 > 0$

c. $-3x^2 + 8x + 4 \geq 0$

g. $(x - 2)^2 \geq 4$

3. Rozwiąż nierówności:

a. $(x + 1)(x - 3) \geq 0$

d. $(3 - x)(2 - x) \leq 0$

b. $(3 - 2x)(x + 5) \leq 0$

e. $x(2x - 8) < 0$

c. $(\sqrt{2} - x)(x + 7) > 0$

f. $(3x + 1)(x - 2) \geq 0$

Przykład 5

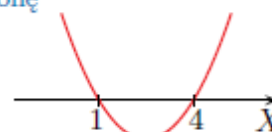
Rozwiąż nierówność $2(2 - x) < -x(x - 3)$.

$$4 - 2x < -x^2 + 3x$$

$$x^2 - 5x + 4 < 0$$

wykonujemy mnożenie
przenosimy wszystkie wyrazy
na lewą stronę

Rozwiązujemy równanie $x^2 - 5x + 4 = 0$ i otrzymujemy $x = 1$ lub $x = 4$. Szkicujemy parabolę i odczytujemy, że nierówność jest spełniona dla $x \in (1; 4)$.



4. Rozwiąż nierówności:

a. $2(x + 1)^2 - (x - 3)^2 \geq 11x - 1$

c. $(x + 3)(3 - x) > 3(x - 2)^2 + 5$

b. $(x - 2)^2 + 5 \leq 5(2x - 8)$

d. $(3x - 5)(2x + 1) + (7x - 5)^2 < -2$

Zadanie 1

Rozwiąż równanie.

a) $7x^3 - 56 = 0$

c) $8x^3 - 1 = 0$

e) $5x^3 + 0,625 = 0$

b) $2x^3 + 54 = 0$

d) $27x^3 + 8 = 0$

f) $3x^3 - 192 = 0$

sposób rozwiązania równania:

$$(x-5)^3 = 64$$

$$x-5 = 4 \quad \text{wykorzystując podany sposób rozwiąż: } (x+3)^3 = -64, (2x-1)^3 = -125$$

$$x = 9$$

Przykład 2

a) Rozwiąż równanie $x^3 - 4x = 0$.

$$x(x^2 - 4) = 0 \quad \text{wylączamy } x \text{ przed nawias}$$

$$x = 0 \text{ lub } x^2 - 4 = 0$$

Równość $x^2 - 4 = 0$ zachodzi, gdy $x = -2$ lub $x = 2$.

Zatem równanie ma trzy rozwiązania: $-2, 0$ i 2 .

Przykład 3

Rozwiąż równanie $x(x+2)(x-3) = 0$.

Korzystamy z podanej obok własności i otrzymujemy:

$$x = 0 \text{ lub } x + 2 = 0 \text{ lub } x - 3 = 0.$$

$$a \cdot b \cdot c = 0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy} \\ a = 0 \text{ lub } b = 0 \text{ lub } c = 0.$$

Zatem równanie ma trzy rozwiązania: $0, -2$ i 3 .

Zadanie 2

Rozwiąż równanie.

a) $x(x-2)(x-4) = 0$

d) $(x+1)(x+9)(3x-1) = 0$

b) $x(x-5)(x+6) = 0$

e) $(x-9)(2x+1)(2x-3) = 0$

c) $x(x+1)(2x+6) = 0$

f) $(4x+1)(6x-9)(2x-8) = 0$

Zadanie 3

Rozwiąż równanie.

a) $3x^3 + 27 = 51$

b) $64x^3 + 7 = 8$

c) $2x^3 + 300 = 50$

Zadanie 4.

Oblicz sumę rozwiązań równania.

a) $x(8x+6)\left(\frac{1}{2}x-3\right) = 0$

b) $(3x-1)\left(\frac{2}{3}x-8\right)\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right) = 0$

Przykład 4

Rozwiąż równanie $(x^2 + x)(x - 4) = 0$.

$$x(x + 1)(x - 4) = 0 \quad \text{wyłączamy } x \text{ przed nawias}$$
$$x = 0 \text{ lub } x + 1 = 0 \text{ lub } x - 4 = 0$$

Zatem równanie ma trzy rozwiązania: 0, -1 i 4.

Zadanie 5

Rozwiąż równanie.

a) $x(x^2 - 4x) = 0$

d) $(x^2 + x)(x - 6) = 0$

b) $x(4x^2 + x) = 0$

e) $(2x^2 - x)(2x + 1) = 0$

c) $(x^2 - x)(x + 2) = 0$

f) $(4x^2 - x)(6x - 2) = 0$

Równania wymierne (prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych)

<https://www.youtube.com/watch?v=Wble-R0o-kQ>

Przykład 1

Rozwiąż równanie $\frac{6}{x-1} = 4$.

Zakładamy, że $x - 1 \neq 0$, czyli $x \neq 1$.

$$\frac{6}{x-1} = 4 \quad / \cdot (x-1)$$
$$6 = 4x - 4$$
$$-4x = -10$$
$$x = \frac{5}{2}$$

Liczba $\frac{5}{2}$ spełnia założenie, więc jest rozwiązaniem równania.

Przykład 2

Rozwiąż równanie $\frac{2}{x-2} = x - 1$.

Zakładamy, że $x - 2 \neq 0$, czyli $x \neq 2$.

$$\frac{2}{x-2} = x - 1 \quad / \cdot (x-2)$$
$$2 = (x - 1)(x - 2)$$
$$2 = x^2 - 3x + 2$$
$$x^2 - 3x = 0$$
$$x(x - 3) = 0$$
$$x = 0 \text{ lub } x = 3$$

Liczby 0 i 3 spełniają założenie, więc są rozwiązaniami równania.

Przykład 3

Rozwiąż równanie $\frac{2}{x+1} = \frac{3}{x-2}$.

Zakładamy, że $x + 1 \neq 0$ i $x - 2 \neq 0$, czyli $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 2\}$.

$$\frac{2}{x+1} = \frac{3}{x-2} \quad / \cdot (x+1)(x-2)$$

$$2(x-2) = 3(x+1)$$

$$2x - 4 = 3x + 3$$

$$-x = 7$$

$$x = -7$$

Liczba -7 spełnia założenia, więc jest rozwiązaniem równania.

Zadanie 1

Rozwiąż równanie.

a) $\frac{5}{x} = 4$

c) $\frac{x}{2x+1} = 1$

e) $\frac{5x+4}{2x-1} = 3$

b) $\frac{-7}{x-1} = 8$

d) $\frac{-6x}{2x-5} = 2$

f) $\frac{4x-2}{3-2x} = \frac{1}{2}$

Zadanie 2

Rozwiąż równanie.

a) $\frac{7}{x+1} = \frac{3}{x+5}$

c) $\frac{x}{x-2} = \frac{x+2}{x-1}$

e) $\frac{x+3}{x-3} = \frac{6}{x-3}$

b) $\frac{-2}{x-1} = \frac{4}{2x+3}$

d) $\frac{x-3}{2x} = \frac{x-2}{2x+1}$

f) $\frac{2x}{x-7} = \frac{x}{x+1}$

Zadanie 3

Rozwiąż równanie.

a) $\frac{4}{x} = \frac{3}{2+x}$

c) $\frac{x}{x-1} = \frac{x+2}{x}$

e) $\frac{x+1}{x} = \frac{x+1}{2x+1}$

b) $\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-3} = 0$

d) $\frac{x-3}{x-2} = \frac{x+3}{x+2}$

f) $\frac{x+4}{2x-1} - \frac{1}{x} = 0$

$$\frac{3}{x-4} - \frac{5}{x+2} = 0 \quad \text{zał: } x \neq 4, x \neq -2$$

$$\frac{3}{x-4} = \frac{5}{x+2}$$

$$3(x+2) = 5(x-4)$$

$$3x+6 = 5x-20$$

$$2x = 26, \quad \text{odp: } x = 13$$

wykorzystując podane rozwiązanie **rozwiąż** przykłady b) i f)