MATEMATYKA Semestr czwarty

Tydzień 18.05-22.05

Zbliża się koniec semestru czwartego. Zadania są powtórzeniowe i tu dotyczą ciągów. Zadań jest sporo. Jeśli zdołasz pokonać wszystkie to super. Ale nie musisz. Wybieraj, bo niektóre są trudne. Co Ci się uda zrobić to prześlij zdjęcie. Ale z umiarem

Temat lekcji 1.Ciąg arytmetyczny i geometryczny – zadania utrwalające

Na początek poznane wzory

Ciąg arytmetyczny:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

$$S_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2}$$

$$a, b, c \text{ tworza ciąg arytmetyczny jeśli } b = \frac{a+c}{2}$$

Ciąg geometryczny

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$a, b, c \text{ tworzą ciąg geometryczy, jeśli } \frac{c}{b} = \frac{b}{a}$$

No to robimy nietrudne zadania

1.Czy podany ciąg jest geometryczny:

a. 2, 10, 50, 250, 1250
b. 1, 2, – 4, – 8, 16
c. 1, – 2, 4, – 8, 16, – 32

d. 1, 2, 3, 4, 5

e. (trudny) $\sqrt{2}$, 2, $2\sqrt{2}$, 4, $4\sqrt{2}$

2.Mając dane dwa pierwsze wyrazy ciągu geometrycznego, wyznacz trzy kolejne.

a). 1, 4 ,____ , ____, ____ **b).** $\sqrt{5}$, $4\sqrt{5}$, _____,____, ____

c). 1, – 2, _____, _____,_____

3.W miejsce x, y wstaw takie liczby, aby ciąg (3, 6, x, 24, 48, y) był geometryczny. (zgaduj!!!!)

4.(łatwe) Wypisz trzy kolejne wyrazy ciągu geometrycznego, jeśli:

a. $a_1 = 7$, $q = 1$ **c.** $a_1 = 80$, $q = \frac{1}{2}$

b. $a_1 = -1$, $q = \frac{1}{3}$ **d.** $a_1 = 2$, $q = -3$

5.Wyznacz szósty wyraz ciągu geometrycznego (a_n), jeżeli $a_1 = 3$, $q = 2$.

Rozwiązanko: Mamy wzór wynikający ze wzoru ogólnego na wyraz szósty $a_6 = a_1 q^5$

I wstawiamy dane i licz $a_6 = 3 \cdot 2^5 =$ ……………….

6.Wyznacz czwarty wyraz ciągu geometrycznego (a_n), jeżeli $a_1 = 2\sqrt{3}$, $q = \frac{1}{2}$.

Rozwiązanko: Tu będzie trudniej Mamy wzór o na wyraz czwarty

$$a_4 = a_1 q^3$$

I wstawiamy dane $a_4 = 2\sqrt{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{2\sqrt{3}}{1} \cdot \frac{1}{8} = \frac{2\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

skróciliśmy ułamek (najpierw potęgujemy, potem dopisujemy 1 w mianowniku i mnożymy ułamek przez ułamek czyli licznik razy licznik i mianownik razy mianownik)

7.Wyznacz trzeci wyraz ciągu geometrycznego (a_n) *, jeżeli* a_1 *= 100 ,* q *= 0,1.*

Rozwiązanko: Mamy wzór na $wyraz\ czwarty\ a_3 = a_1 q^2$ i dalej robimy jak wyżej, ale mamy ułamek i czarna rozpacz. Trudno. Ale można inaczej i chyba prościej

Wyraz trzeci można znaleźć tak $a_3 = a_1 \cdot q \cdot q$

No to licz

Temat lekcji 2.Ciąg arytmetyczny i geometryczny – zadania utrwalające

8.Wyznacz taką liczbę dodatnią x, aby ciąg 5, x, 20 był ciągiem geometrycznym.(jaki wzór zastosujesz ? Jest na początku lekcji) Albo zgadnij

9.Wyznacz taką liczbę x, aby ciąg 4, x, 25 był ciągiem geometrycznym .

Rozwiązanie. To zadanie jest prawie identyczne jak poprzednie, ale nie jest powiedziane ,że x ma być liczbą dodatnią i nie da się poprawnie zgadnąć Stosujemy wzór jak w poprzednim zadaniu

$a, b, c\ tworzą\ ciąg\ geometryczy, jeśli\ \frac{c}{b} = \frac{b}{a}$

więc $\frac{25}{x} = \frac{x}{4}$

i mnożymy na krzyż

$$x \cdot x = 25 \cdot 4$$

$x^2 = 100$ *i tu UWAGA !!!! Są dwa wyniki różniące się znakami*

To x = 10 oraz x $= -10$ czyli sa dwa ciągi 4, 10, 25 oraz 4, - 10, 25

W dwóch kolejnych zadaniach stosuj ten sam wzór (ale tu nie będzie równań kwadratowych i wyjdzie jedno rozwiązanie)

9.Wyznacz taką liczbę x, aby liczby x + 3, 5, 10 tworzyły ciąg geometryczny.

10.Wyznacz taką liczbę x, aby liczby x – 2 , x, x + 4 tworzyły ciąg geometryczny.

Kolejne zadanie można zgadywać

11.Między liczby 16 i 1024 wstaw takie liczby x i y, aby ciąg 16, x, y ,1024 był ciągiem geometrycznym.

12.Oblicz dziewiąty wyraz ciągu geometrycznego, wiedząc, że wyraz piąty tego ciągu jest równy 5 . Natomiast wyrazy szósty i siódmy są równe.

Wskazówka. Pomyśl , jaki jest iloraz q jeśli wyraz szósty i siódmy są równe !!!!! To jakie powinny być wszystkie wyrazy ____,____, _____, ______, 5, x, x,

13.Wyznacz x i y ciągu geometrycznego:

: $a)\ x,\ y, 108,\ 324$ *(tu łatwo oblicz q, dalej do tyłu wyrazy muszą być ileś razy mniejsze)*

b)) $2,\ x,\ \frac{9}{2},\ y,\ \frac{81}{8}$ *(to już niełatwe, tylko dla odważnych, wzór* $\frac{c}{b} = \frac{b}{a}$ *)*

14.W ciągu geometrycznym $a_2 = 1$ *i* $a_3 = 2$*. Oblicz q i* a_1 *.(proste , rób, oblicz q dzieląc wyraz przez wyraz POPRZEDNI)*

15.Czy ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = 2^n$ *jest ciągiem geometrycznym? Tak, to widać w tej potędze*

16.Wyznacz piętnasty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n)*, jeżeli* $a_3 = -3$ *,* $r = 7$*. (tu stosujesz wzór na wyraz piętnasty* $a_{15} = a_3 + ile\ r$*?)*

17.Wyznacz trzynasty wyraz ciągu (a_n)*, jeżeli* $a_1 = -1$ *,* $r = 3$*. Wyznacz wzór na wyraz ogólny tego ciągu (łatwe, stosuj wzory:* $a_{13} = a_1 + 12r$

$a_n = a_1 + (n-1)r$

Temat lekcji 3.Ciąg arytmetyczny i geometryczny – zadania utrwalające

TERAZ TROCHĘ CIĄGU ARYTMETYCZNEGO

18.Wyznacz taką liczbę x, aby ciąg 23, x, 33 był ciągiem arytmetycznym.

Tu i niżej stosuj wzór

$$a, b, c \text{ tworza ciąg arytmetyczny jeśli } b = \frac{a+c}{2}$$

19.Dla jakich wartości x liczby 3x+1, 2x – 4, 5x + 3 są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

20. Dla odważnych ! Dla jakich wartości x liczby x+4, 4x, x^2 + 8 są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. (tu pojawi się równanie kwadratowe do rozwiązania!!!!!!)

21.Oblicz wyrazy x, y i z ciągu arytmetycznego: 215, x, y, z, –11.

22.Liczby a, b,1 tworzą ciąg arytmetyczny zaś liczby 1, a, b tworzą ciąg geometryczny. Wyznacz a i b.

To zadanie było na maturze. Spróbujmy rozwiązać. Wiemy z treści zadania

a,b,1 to ciąg arytmetyczny czyli to, co jest w środku jest średnią arytmetyczną tych obok wyrazów czyli $b = \frac{a+1}{2}$

1,a,b to ciąg geometryczny więc zapisujemy proporcję

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{1}$$

Tu pomnożymy na krzyż i wychodzi $b = a^2$

W ten sposób mamy dwie zależności $b = a^2$ i $b = \frac{a+1}{2}$ które trzeba połączyć w

jedno

$$a^2 = \frac{a+1}{2}$$

Teraz dopisujemy 1 w mianowniku

$$\frac{a^2}{1} = \frac{a+1}{2}$$

Mnożymy na krzyż

$$2a^2 = a + 1$$

I mamy równanie kwadratowe, ale bardzo niełądne, bo nie ma 0 po prawej no to przeganiamy prawą stronę na lewo z przeciwnymi znakami

$$2a^2 - a - 1 = 0$$

Wypisujemy a,b,c i liczymy deltę

a=2, b= −1 c= −1

Δ=$b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 1 + 8 = 9 \;\; i \sqrt{\Delta}$= 3delta jest dodatnia , to liczymy dwie wartości a , bo a jest niewiadomą

$$a_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-3}{2\cdot 2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$a_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+3}{2\cdot 2} = \frac{4}{4} = 1$$

Czyli mamy dwie wartości na a

$$a = -\frac{1}{2} \quad oraz \quad a = 1$$

I trzeba teraz znaleźć też dwie wartości na b z zapisu $b = a^2$

No to dla $a = -\frac{1}{2}$ będziemy mieli $b = (-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$

A dla $a = 1$ będziemy mieli $b = 1^2 = 1$

I możemy zapisać ciągi dla znalezionych a i b

Ciąg arytmetyczny

$-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 1$

1,1,1

Ciąg geometryczny

1, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$

1,1,1 to są ciągi stałe

Odp. Szukane a i b to liczby $-\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{4}$ oraz 1 i 1