

Statystyka – nauka zajmująca się badaniem zjawisk masowych

Obserwacja statystyczna – etap badania przeprowadzany za pomocą wywiadu kwestionariuszowego, ankiety, monitoringu, rejestracji, pomiaru.

Populacja generalna – zbiór obiektów objęty badaniem (wykonuje się na niej badanie pełne).

Próba – część populacji objęta bezpośrednio badaniem statystycznym (wykonuje się na niej badanie częściowe).

Liczebność próby – liczba elementów wchodząca w skład próby.

Cecha – własność podlegająca badaniu (mierzalna – ma wartości liczbowe np. wzrost; niemierzalna ma wartości opisowe np. kolor oczu)

Podstawą badania statystycznego są dane statystyczne. Dane te analizuje się i opracowuje, a następnie prezentuje wnioski.

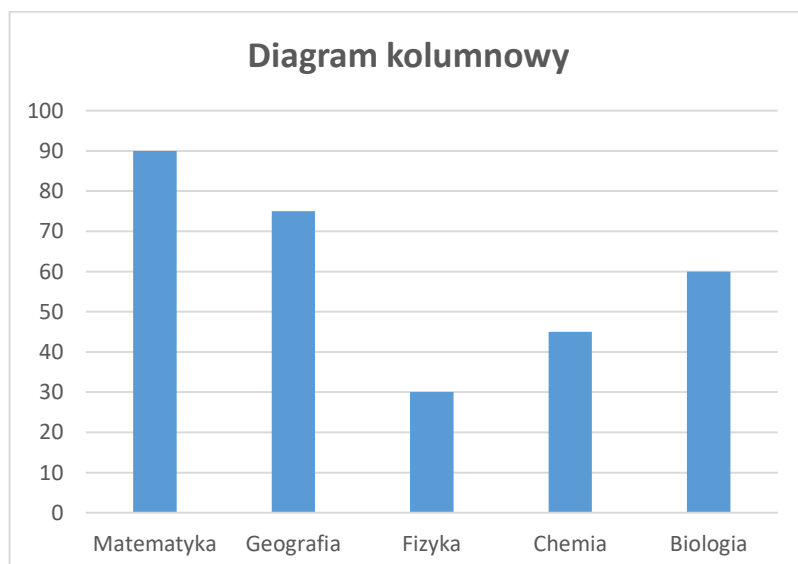
PRZYKŁAD Wśród 300 uczniów pewnego liceum przeprowadzono ankietę. Celem ankiety było zdobycie informacji, którego przedmiotu z grupy matematyczno-przyrodniczych młodzież uczy się najchętniej. Każdy ankietowany wybierał tylko jeden przedmiot. Okazało się, że 90 osób wskazało na matematykę, 75 – geografii, 30 – fizykę, 45 – chemię i 60 – biologię.

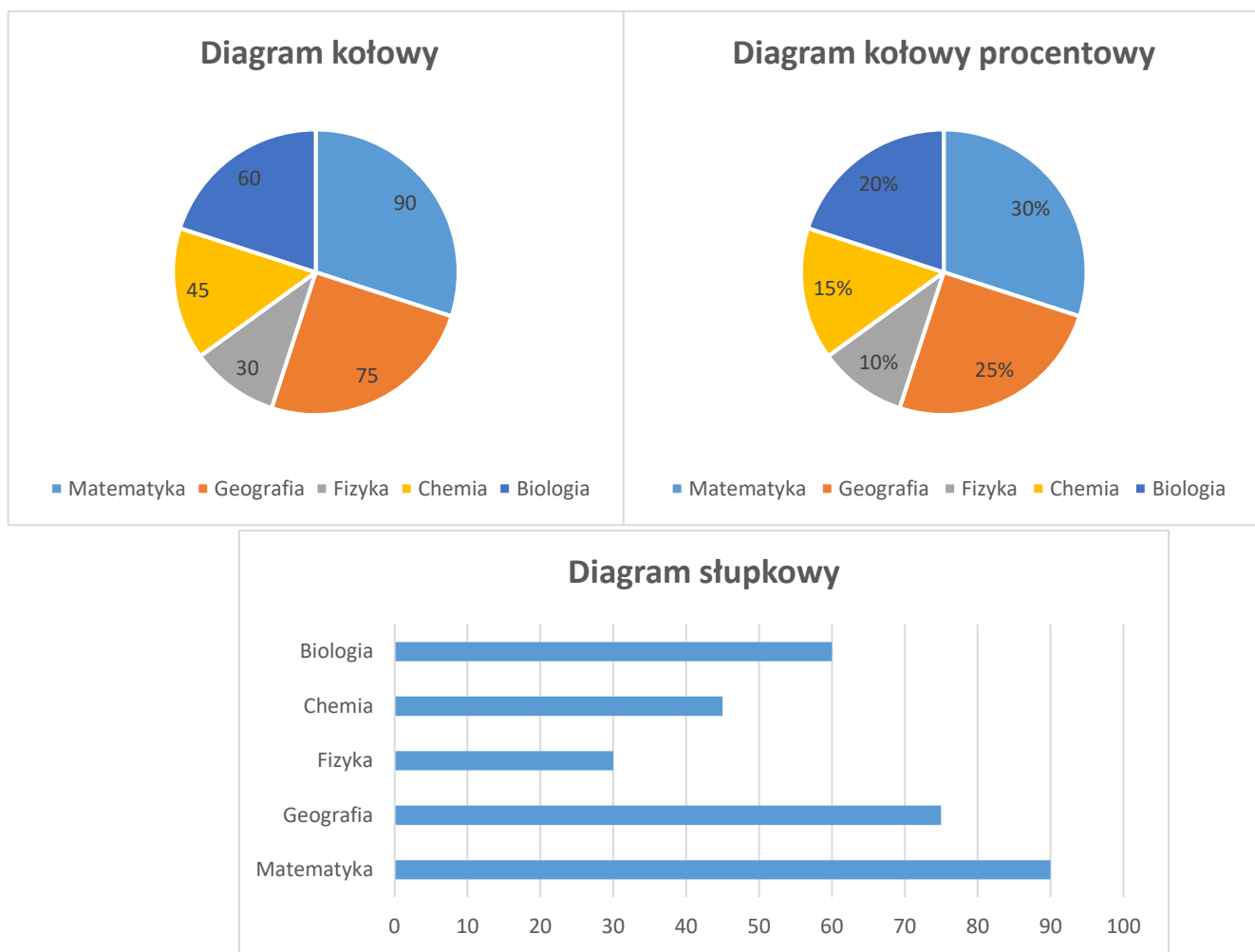
SPOSOBY PRZEDSTAWIANIA WYNIKÓW

Tabela

Przedmiot	Liczba uczniów
Matematyka	90
Geografia	75
Fizyka	30
Chemia	45
Biologia	60

Wyniki możemy zaprezentować graficznie





ZADANIE 1. Wśród 50 losowo wybranych osób przeprowadzono sondę uliczną, w której zapytano: „Ile razy w ciągu minionego półrocza był(a) pan(i) w kinie?”. Otrzymano następujące wyniki: 0 razy odpowiedziało 40% badanych, 1 raz – 30% osób, 2 razy – 20% osób, 3 razy – 10% osób. Przedstaw zebrane dane w postaci tabeli, diagramu kołowego, diagramu słupkowego.

ŚREDNIA Z PRÓBY

Niech liczby $x_1, x_2, \dots, x_n$ będą wartościami pewnej cechy mierzalnej.

Średnia arytmetyczna z próby liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

PRZYKŁAD. Janek z trzech prac z fizyki otrzymał następujące oceny: 2+, 2+, 4. Oblicz średnią ocen Janka z prac klasowych z fizyki, zakładając, że „+” przy ocenie ma wartość 0,5.

$$\bar{x} = \frac{2,5 + 2,5 + 4}{3} = \frac{9}{3} = \boxed{3}$$

PRZYKŁAD. Średnia arytmetyczna liczb 2, 4, 3x, 5, 0, 10 wynosi 8. Oblicz x.

$$\frac{2 + 4 + 3x + 5 + 0 + 10}{6} = 8$$

$$\frac{21 + 3x}{6} = 8 \quad / \cdot 6$$

$$21 + 3x = 48 \quad \rightarrow \quad 3x = 27 \quad \rightarrow \quad \boxed{x = 9}$$

PRZYKŁAD. W szkole przeprowadzono sprawdzian z chemii w trzech semestrach. W 20 – osobowym semestrze I średnia ocen z tego sprawdzianu była równa 2,5; w 22 – osobowym semestrze II średnia ocen była równa 2,5; a w 25 – osobowym semestrze III średnia ocen była równa 4,0. Jaka była średnia ocen ze sprawdzianu we wszystkich trzech semestrach I, II i III?

Wyznamy sumy ocen ze sprawdzianu w każdym semestrze, dodamy wyniki i podzielimy przez liczbę wszystkich słuchaczy.

Suma ocen ze sprawdzianu w semestrze I jest równa: $20 \cdot 2,5$

w semestrze II jest równa: $22 \cdot 2,5$

w semestrze III jest równa: $25 \cdot 4,0$

Liczba wszystkich słuchaczy: $20 + 22 + 25 = 67$

$$\bar{x} = \frac{20 \cdot 2,5 + 22 \cdot 2,5 + 25 \cdot 4,0}{67} = \frac{50 + 55 + 100}{67} = \frac{205}{67} = 3,059... \approx \boxed{3,1}$$

ZADANIE 2. W pięcioosobowej rodzinie każdy powiedział ile godzin w ciągu dnia ogląda telewizję. Oto wyniki:

2 godz.

2,5 godz.

3 godz.

1 godz.

1,5 godz.

Jaki jest średni czas oglądania telewizji w ciągu dnia?

ZADANIE 3. Średnia arytmetyczna liczb 2, 5, 2x, 7, 0, 12, x wynosi 8. Oblicz x.

ZADANIE 4. W trzech grupach A, B, C przeprowadzono próbną maturę z matematyki. W 30 osobowej grupie A średnia liczba zdobytych punktów była równa 25; w 35 osobowej grupie B – 30; zaś w 25 osobowej grupie C – 32. Oblicz średnią liczbę punktów z próbnej matury dla wszystkich trzech grup.

ŚREDNIA WAŻONA

Niech liczby $x_1, x_2, \dots, x_n$ będą wartościami pewnej cechy mierzalnej, a liczby dodatnie $w_1, w_2, \dots, w_n$ będą wagami odpowiadającymi tym wartościom cechy

Średnia ważona $\bar{x}_w$ liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$ z wagami $w_1, w_2, \dots, w_n$:

$$\bar{x}_w = \frac{x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2 + \dots + x_n \cdot w_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$$

PRZYKŁAD. Nauczyciel przedstawił uczniom zasady wystawiania oceny semestralnej z matematyki. Poinformował, że największe znaczenie mają dla niego prace klasowe, mniej ważne są krótkie sprawdziany i odpowiedzi ustne, a najniższe punktowane są prace domowe. Odpowiednim formom przypisał następujące wagi:

Forma	Prace klasowe	Odpowiedzi lub krótkie sprawdziany	Prace domowe
Waga	5	3	2

- a. Oblicz, jaką ocenę wystawi nauczyciel uczniowi, który w semestrze otrzymał następujące oceny: prace klasowe: 1, 3, 2, 2; krótkie sprawdziany: 5, 4; odpowiedzi ustne: 3; prace domowe: 3, 4.

$$\bar{x}_w = \frac{1 \cdot 5 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 5 + 5 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2}{5 + 5 + 5 + 5 + 3 + 3 + 3 + 3 + 2 + 2} = \frac{90}{33} \approx 2,7 \text{ --- ocena: } \mathbf{2+}$$

- b. Oblicz średnią arytmetyczną ocen ucznia i oceń, czy bardziej korzystne w tej sytuacji jest wystawienie oceny będącej średnią arytmetyczną, czy średnią ważoną.

$$\bar{x} = \frac{1 + 3 + 2 + 2 + 5 + 4 + 3 + 3 + 4}{9} = \frac{27}{9} = 3 \text{ --- ocena: } \mathbf{3}$$

Odp. Korzystniejsza dla ucznia jest ocena końcowa na podstawie średniej arytmetycznej.

MEDIANA Z PRÓBY I MODA (DOMINANTA) Z PRÓBY.

PRZYKŁAD. Wśród 20 losowo wybranych rodzin przeprowadzono badanie statystyczne. Przedmiotem badania była liczba posiadanych dzieci. Otrzymano następujące wyniki:

1 3 0 2 3 1 1 1 2 2 3 1 1 3 1 2 4 1 1 3

Która wartość powtarza się najczęściej? Jaka jest dominanta (moda) tej próby?

Na początku porządkujemy dane statystyczne od wartości najmniejszej do największej:

0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4

Wybieramy najczęściej powtarzającą się wartość : $M_o = 1$

Moda (dominanta) – M_o to wartość, która w zbiorze wyników powtarza się najczęściej.

Dane z treści zadania możemy przedstawić w tabelce:

Wartość cechy (liczba dzieci w rodzinie)	0	1	2	3	4
Liczebność (liczba rodzin)	1	9	4	5	1

PRZYKŁAD. Oblicz medianę M_e zbioru danych statystycznych przedstawionych w postaci tabeli:

Wartość	2	4	7	8
Liczebność	3	2	5	1

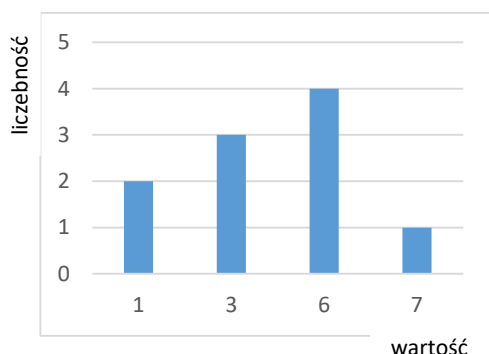
Uporządkujemy dane statystyczne: 2, 2, 2, 4, 4, **7**, 7, 7, 7, 7, 8

Liczba danych: 11

Mediana (M_e) to potocznie mówiąc wartość środkowa w ciągu danych.

Łatwo ją wybrać, jeżeli liczba wyników jest nieparzysta, tak jak w tym przypadku. $M_e = 7$

PRZYKŁAD. Oblicz medianę M_e zbioru danych statystycznych przedstawionych w postaci diagramu kolumnowego.



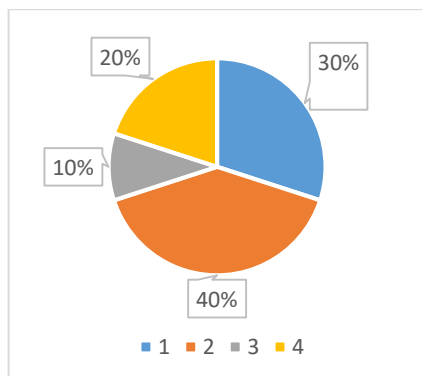
Uporządkowanie danych statystycznych:

1 1 3 3 **3** | **6** 6 6 6 7

Liczba danych: 10 „środek” wypada między 3 i 6

$$M_e = \frac{3 + 6}{2} = \frac{9}{2} = 4,5$$

ZADANIE 5. Przeprowadzono sondę uliczną. Każdej z 20 osób wybranych losowo na ulicy, zadano pytanie: „Ile książek przeczytał(a) Pan(i) w ciągu ostatniego kwartału?”. Wyniki przedstawiono poniżej w postaci procentowego diagramu kołowego. Uporządkuj dane statystyczne. Wyznacz modę i medianę.



1 książka: $0,3 \cdot 20 =$

2 książki: $0,4 \cdot 20 =$

3 książki: $0,1 \cdot 20 =$

4 książki: =

Uporządkowanie danych statystycznych:

...

Liczba danych: ...

$M_o =$

$M_e =$

LITERATURA:

Marcin Kurczab, Elżbieta Kurczab, Elżbieta Świda - Matematyka. Podręcznik do liceów i techników. Klasa 3.

Oficyna Edukacyjna Krzysztof Pazdro – Warszawa 2012;

Marcin Kurczab, Elżbieta Kurczab, Elżbieta Świda - Matematyka. Zbiór zadań do liceów i techników. Klasa 3.

Oficyna Edukacyjna Krzysztof Pazdro

MATERIAŁY DO EGZAMINU

Podręczniki na stronie internetowej www.epodreczniki.pl

Podręcznik: **Prosto do matury**. Podręcznik do matematyki dla szkół ponadgimnazjalnych. **Klasa 3**. Zakres podstawowy.

Autorzy: A. Antek, K. Belka, P. Grabowski. Wyd.: **Nowa Era**

TEMATYKA ZAJĘĆ Z MATEMATYKI - SEMESTR V

Stereometria

1. Graniastosłupy – powtórzenie podstawowych własności, graniastosłupy prawidłowe i proste, prostopadłościanny objętości i pole powierzchni
2. Ostrosłupy – powtórzenie własności, ostrosłupy prawidłowe, objętości i pole powierzchni
3. Walec, stożek, kula – powtórzenie podstawowych własności, objętości i pole powierzchni, Obliczenia pól i objętości również z zastosowaniem trygonometrii.

Kombinatoryka; rachunek prawdopodobieństwa oraz elementy statystyki opisowej

1. Proste zadania kombinatoryczne uwzględniające losowanie kolejno ze zwracaniem i bez zwracania
 2. Zasada mnożenia. Zasada dodawania
 3. Doświadczenia losowe, zdarzenia losowe, zbiór zdarzeń elementarnych, działania na zdarzeniach – zdarzenie pewne, zdarzenie niemożliwe,, zdarzenie przeciwne, zdarzenia wykluczające się.
 4. Klasyczna definicja prawdopodobieństwa i jego podstawowe własności.
 5. Obliczanie prawdopodobieństw zdarzeń w skończonych przestrzeniach probabilistycznych, zastosowanie własności prawdopodobieństwa.
 6. Elementy statystyki opisowej – badanie próby losowej i jej opis za pomocą liczb charakterystycznych, średnia arytmetyczna, średnia ważona, mediana, wariancja i odchylenie standardowe, przykłady badań statystycznych GUS.
-

PRZYKŁADOWE ZADANIA: graniastosłup i ostrosłup

1. Suma długości krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka sześcianu wynosi 15 cm. Oblicz pole i objętość sześcianu .
2. Sześcian ma przekątną równą $4\sqrt{3}$. Oblicz jego objętość i pole .
3. Pole sześcianu wynosi 54. Oblicz jego objętość.
4. Objętość sześcianu wynosi 27 cm^3 . Znajdź pole sześcianu i jego przekątną.
5. Krawędzie sześcianu zmniejszono o 20%. O ile procent zmniejszy się objętość?
6. Prostopadłościan ma wymiary 3 na 4 na 6. Oblicz jego objętość i pole powierzchni.
7. W prostopadłościanie krawędzie podstawy mają długości 6 cm i 10 cm. Wysokość prostopadłościanu jest o 3 cm krótsza od dłuższej krawędzi podstawy. Oblicz pole i objętość bryły
8. W prostopadłościanie krawędzie podstawy mają długości 8 cm i 3 cm, a wysokość ma 4 cm. Wyznacz przekątną prostopadłościanu oraz miary kątów między przekątną prostopadłościanu a przekątnymi ścian bocznych.
9. Podstawą prostopadłościanu jest prostokąt o bokach 6 i 8, przekątna prostopadłościanu ma długość 16 cm Oblicz objętość i pole bryły.
10. Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 6, a przekątna ściany bocznej ma długość 10. Znajdź objętość i pole bryły.
11. Podstawą graniastosłupa prostego jest kwadrat o polu 100 , a przekątna ściany bocznej tworzy z krawędzią podstawy kąt 60° . Oblicz objętość i pole bryły.
12. Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 8 cm i tworzy z podstawą kąt 30° . Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej bryły.
13. Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt równoboczny o boku 6 cm. a przekątna ściany bocznej ma długość 10. Oblicz objętość i pole bryły.

14. Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt równoboczny o boku 4 cm. a przekątna ściany bocznej tworzy z podstawą kąt 30° . Oblicz objętość i pole bryły.
15. Ile wierzchołków i krawędzi ma graniastosłup o 22 ścianach
16. Ile krawędzi i ścian ma ostrosłup o 20 wierzchołkach
17. Oblicz objętość i pole boczne ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, w którym krawędź podstawy ma długość 12 cm , a wysokość ściany bocznej ma długość 10 cm.
18. Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, w którym krawędź podstawy ma długość 12 cm, a kąt między ścianą boczną i podstawą ostrosłupa ma miarę 30° .
19. Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, w którym przekątna podstawy ma długość $8\sqrt{2}$ cm, a kąt nachylenia krawędzi bocznej do podstawy ostrosłupa ma miarę 60° .
20. Oblicz objętość i pole ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, w którym każda krawędź ma długość 6 cm.
21. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 6 cm, a wysokość ściany bocznej ma 5 cm. Znajdź objętość i pole bryły.
22. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym wysokość ściany bocznej wynosi 22, a tangens kąta nachylenia ściany bocznej do podstawy wynosi $\frac{4\sqrt{6}}{5}$. Wyznacz objętość ostrosłupa
23. Znajdź pole i objętość walca , którego przekrój osiowy jest kwadratem o boku 10 .
24. Znajdź pole walca , którego przekrój osiowy jest kwadratem o przekątnej $4\sqrt{2}$.
25. Oblicz objętość walca, którego pole całkowite wynosi 20π , a promień podstawy jest 3 razy krótszy od wysokości
26. Pole powierzchni całkowitej walca jest dwa razy od pola powierzchni bocznej. Objętość walca wynosi 27π . Oblicz promień walca.
27. Pole powierzchni bocznej stożka jest dwa razy większe od pola podstawy stożka. Wykaż, że tworząca tworzy z podstawą kąt 60°
28. Tworząca stożka ma długość 13 i, a średnica podstawy 10. Znajdź objętość stożka.
29. Tworząca stożka ma długość 6 i tworzy z podstawą kąt 30° . Znajdź objętość i pole stożka.
30. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym o boku 6. Znajdź objętość stożka
31. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem prostokątnym o przeciwprostokątnej równej 16.. Znajdź pole stożka
32. Znajdź pole i objętość kuli o średnicy 6.
33. Ile razy wzrośnie pole, ile objętość kuli, jeśli jej promień wzrośnie czterokrotnie?
34. Oblicz pole powierzchni kuli, której powierzchnia zawiera wierzchołki sześcianu o przekątnej 6cm

ZADANIA: rachunek prawdopodobieństwa

1. Rzucamy a) trzema monetami, b) czterema monetami. Ile jest wszystkich wyników?
2. Rzucamy a) trzema kostkami, b) pięcioma kostkami . Ile jest wszystkich wyników.?
3. Rzucamy trzema monetami i kostką . Ile jest wszystkich wyników?
4. Ile liczb czterocyfrowych można utworzyć z cyfr 1,2,3, 5, 6 ,8,9 A ile, gdy cyfry nie powtarzają się?
5. Z cyfr 0,1,2,3,4,5,6, 7 tworzymy liczby czterocyfrowe. Ile będzie dowolnych liczb, a ile liczb o różnych cyfrach?
6. Na ile sposobów można ustawić 5 osób w kolejce po bilety?
7. Ile jest liczb pięciocyfrowych o niepowtarzających się cyfrach?
8. W urnie jest 10 kul białych, 3 zielone i 7 czarnych. Wybieramy losowo jedną kulę . Oblicz prawdopodobieństwo a) wyboru kuli białej b) wyboru kuli zielonej c) wyboru kuli nie białej
9. W pudełku są kartki z liczbami dwucyfrowymi. Bierzymy losowo jedną kartkę. Oblicz prawdopodobieństwo , że wylosowana liczba ma obie cyfry parzyste.
10. Na loterii jest 200 losów , tym 10 wygranych. Kupujemy los. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń A - kupienia losu wygranego i B - kupienia losu pustego.

- 11.** W wagonie jest dziesięć przedziałów po osiem miejsc w każdym. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że kupując jeden bilet usiądziesz przy oknie.
- 12.** Ze zbioru liczb dwucyfrowych wybieramy jedną. Oblicz prawdopodobieństwo, że wybierzemy liczbę podzielną przez 12.
- 13.** Tworzymy liczby trzy cyfrowe z cyfr 1,2,3,4,5,6 i wybieramy jedną. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wybierzemy liczbę a) o różnych cyfrach,
b) o jednakowych cyfrach c) parzystą d) większą od 500
- 14.** Spośród dzielników naturalnych liczby 36 wybieramy jeden. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosowana liczba będzie dzielnikiem liczby 12.
- 15.** Na loterii są 44 losy przegrywające, a pozostałe są wygrywające. Kupujemy jeden los. Ile jest wszystkich losów, jeśli prawdopodobieństwo kupienia losu wygrywającego jest równe $\frac{1}{5}$.
- 16.** Rzucamy trzy razy monetą. Oblicz prawdopodobieństwo: a) wypadnięcia dwóch orłów, b) wypadnięcia najwyżej dwa razy orła, c) wypadnięcia co najmniej raz orła
- 17.** Rzucamy dwa razy kostką sześcienną. Oblicz prawdopodobieństwo: a) wyrzucenia dwa razy nieparzystej liczby oczek, b) wypadnięcia sumy oczek mniejszej od 7.
- 18.** Rzucamy dwiema kostkami . Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń:
A - wypadła suma oczek równa 9 B - wypadła suma oczek mniejsza od 5,
C - wypadła parzysta liczba oczek na obu kostkach , D - na pierwszej wypadło mniej oczek niż na drugiej , E-wypadła ta sama liczba oczek na obu kostkach.
- 19.** Rzucamy trzema kostkami. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma liczby oczek w drugim i trzecim rzucie jest równa liczbie oczek z pierwszego rzutu.
- 20.** Na przystanku stoi 5 osób. Przyjeżdża tramwaj trzy wagonowy. Oblicz prawdopodobieństwo, że wszyscy wsiądą do tego samego wagonu.
- 21.**(drzewo) W urnie jest 14 kul białych, 6 czarnych. Wybieramy losowo 2 kule. Oblicz prawdopodobieństwo: a) wyboru kul białych b) wyboru co najmniej jednej białej c) wyboru kul w jednym kolorze.
- 22.** (drzewo) W klasie jest 10 chłopców i 8 dziewczynek . Wybieramy dwie osoby Oblicz prawdopodobieństwo a) wyboru samych chłopców b).wyboru 1 chłopca i 1dziewczynki
- 23.**(drzewo) W pudle są 3 kule białe i 4 czarne . Wybieramy dwie kule. Oblicz prawdopodobieństwo wyboru kul tego samego koloru.
- 24.** Z talii 24 kart losujemy jedną kartę. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowano karo lub damę.
- 25.** Z liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach utworzonych z cyfr 0, 1, 5, 8, 9 losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczby parzystej (odp $\frac{21}{48}$)
- 26.** Rzucamy czterema kostkami. Oblicz prawdopodobieństwo wyrzucenia tej samej liczby oczek na każdej kostce.
- 27.** Rzucamy pięcioma monetami. Oblicz prawdopodobieństwo wyrzucenia czterech lub pięciu orłów.
- 28.** Znajdź dominantę, medianę i średnią arytmetyczną(z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku) danych:
a) 2,3,2,1,2,2,4,,5,4, b) 38, 40, 38, 42, 42,42, 44
- 29.** Średnia arytmetyczna liczb 2,5, 7,0,12, x wynosi 12 .Oblicz x
- 30.** Do zestawu liczb 5, 4, 4, 1, 5, 5, 9, 3 dopisano liczbę x taką, że średnia arytmetyczna nowego zestawu liczb jest równa ich medianie. Oblicz x
- 35.** Oblicz średnią ważoną danych w tabelce:

Liczba	1	3	5	7
Waga	4	6	3	2