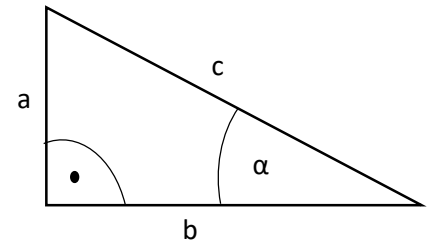


$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$



• **Jedynka trygonometryczna**

Z twierdzenia Pitagorasa narysowanego dla trójkąta prostokątnego:

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad /: c^2$$

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

Podstawiamy $\frac{a}{c} = \sin \alpha$ oraz $\frac{b}{c} = \cos \alpha$ i otrzymujemy:

$$(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$$

Co przyjęto zapisywać:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Otrzymany wzór nazywamy „jedyneką trygonometryczną”.

• **Związek między sinusem, cosinusem i tangensem**

Obliczmy:

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\boxed{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha}$$

PRZYKŁAD. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α , wiedząc, że $\sin \alpha = \frac{1}{3}$

Skorzystamy z jedynki trygonometrycznej: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

Po podstawieniu $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ otrzymujemy: $\frac{1}{9} + \cos^2 \alpha = 1$

Czyli: $\cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9}$

$\cos^2 \alpha = \frac{8}{9}$ --- funkcje trygonometryczne kąta ostrego przyjmują tylko wartości dodatnie, więc:

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \rightarrow \boxed{\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

Obliczamy: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{3} : \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \rightarrow \boxed{\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}}$

ZADANIE 1. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α , wiedząc, że:

a. $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ b. $\cos \alpha = \frac{2}{5}$

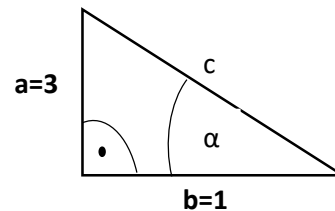
PRZYKŁAD. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α , wiedząc, że $\operatorname{tg} \alpha = 3$.

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{1}$, czyli można przyjąć, że w narysowanym trójkącie prostokątnym $a = 3$ i $b = 1$

Wtedy z twierdzenia Pitagorasa: $a^2 + b^2 = c^2$

$$\begin{aligned} 3^2 + 1^2 &= c^2 \\ 10 &= c^2 \quad \text{i } c > 0 \\ c &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10} \qquad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$



Związki między funkcjami trygonometrycznymi, które są prawdziwe dla wszystkich kątów ostrych nazywamy **tożsamościami trygonometrycznymi**. Znamy już dwie:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

Korzystając z nich można udowadniać inne.

PRZYKŁAD. Udowodnij tożsamość $\sin^2 \alpha - 2\cos^2 \alpha = 3\sin^2 \alpha - 2$

L

P

Przekształcenie zaczniemy od lewej strony (L). Podstawimy $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ z jedynki trygonometrycznej:

$$L = \sin^2 \alpha - 2\cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha - 2(1 - \sin^2 \alpha) = \sin^2 \alpha - 2 + 2\sin^2 \alpha = 3\sin^2 \alpha - 2 = P$$

Otrzymaliśmy prawą stronę (P), czyli udowodniliśmy tożsamość.

ZADANIE 2. Udowodnij tożsamości:

- $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + 2\sin \alpha \cos \alpha$
- $\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 = \operatorname{tg}^2 \alpha$
- $2\sin^2 \alpha - 3\cos^2 \alpha + 3 = 5\sin^2 \alpha$

ZADANIE 3. Sprawdź, czy podana zależność jest prawdziwa.

- $\sin \alpha = \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$
- $\sin \alpha + \cos \alpha = 1$

ZADANIE 4. Oblicz wartość wyrażenia nie korzystając z tablic trygonometrycznych.

- $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$, jeżeli $\sin \alpha = \frac{2}{3}$
- $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$, jeżeli $\cos \alpha = \frac{1}{5}$

ZADANIE 5. Uprość wyrażenia:

- $\sin^2 \alpha - 2 + \cos^2 \alpha$
- $\operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha$
- $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - (\sin \alpha - \cos \alpha)^2$
- $(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \cdot \cos^2 \alpha - 5$
- $(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha) - \sin^2 \alpha$

ZAGADNIENIA DO EGZAMINU

Podręcznik: **Prosto do matury**. Podręcznik do matematyki dla szkół ponadgimnazjalnych. **Klasa 1**. Zakres podstawowy. Autorzy: A. Antek. K. Belka. P. Grabowski. Wyd.: **Nowa Era**

TEMATYKA ZAJĘĆ Z MATEMATYKI:

*Liczby rzeczywiste (rodzaje i własności). Zapis dziesiętny liczby rzeczywistej.

Zamiana ułamków okresowych na zwykłe.

*Wzory skróconego mnożenia.

*Równania liniowe (powtórzenie)

*Nierówności liniowe .

*Przedziały liczbowe i ich wykorzystanie do nierówności i układów nierówności.

*Pierwiastki. (działania wyłączanie czynnika przed pierwiastek, usuwanie niewymierności w mianowniku).

*Obliczenia procentowe Punkty procentowe. Błąd przybliżenia

*Twierdzenie Pitagorasa

*Funkcje trygonometryczne kąta ostrego.

*Związki między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego.

PRZYKŁADOWE ZADANIA:

1. Wykonaj: a) $4 \cdot (-2) - 7$, b) $5 + 9 : (-3)$ c) $5 \cdot (-2) - 7$ d) $12 : (-3) - 4 \cdot (-2)$

e) $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} =$ f) $\frac{1}{2} + \frac{3}{5} =$ g) $\frac{3}{4} : \frac{15}{8}$ h) $\left(\frac{5}{7} - \frac{1}{2}\right) : \frac{6}{7} + 1 =$ i) $1 + \left(\frac{3}{4} - \frac{21}{3}\right) : \frac{6}{5} =$

2. Znajdź rozwinięcie dziesiętne liczb $\cdot \frac{1}{8}, \frac{1}{60}, \frac{1}{12}, \frac{4}{15}$.

3. Oblicz a) $1 + 0,(3)$ b) $0,(2) + 0,(4)$

4. Które z liczb : $0,151515\dots;$ $\sqrt{2};$ $\sqrt{4};$ $2,0202202220\dots;$ $0,(23)$; $0,1213131313\dots$ są wymierne?

5. Wykonaj a) $(2x+5)(4x-2)$ b) $(3a+6)(2a+5) + a^2 - 2a$ c) $(4x+2)(x-5)$ d) $(a+4)^2$ e) $(2a+1)^2$ f) $(2x+3)^2$, g) $(x-7)^2$ h) $(2a-4)^2$, i) $(2-x)^2$, j) $(x+4)^2 + (x-3)^2$ k) $(2a+4)^2 + (2a-5)^2$ l) $(x-5)(x+5)$ m) $(6+x)(6-x)$

6. Wykonaj: a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} + 3^0 - \sqrt{2}^0$ b) $(x^2)^7 x^5 : (x^5)^2$ c) $(a^2)^7 a^9 : (a^3)^5$ d)

$\left(\frac{8}{5}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot 5 - \left(\frac{11}{23}\right)^0\right]$

7. Oblicz a) $\frac{3 \cdot 10^{25}}{6 \cdot 10^{23}}$ b) $\frac{1}{2} \cdot 10^{30} \cdot 12 \cdot 10^{-28}$ c) $2^{-1} \cdot 7^{40} \cdot 20 \cdot 7^{-39}$ d) $\frac{\frac{1}{2} \cdot 4^{-1} \cdot 16}{2^{-3} \cdot \sqrt{64} \cdot 4^0}$

8. Wykonaj: a) $(2\sqrt{3}+4)(3-2\sqrt{3})$ b) $(\sqrt{2}+3)(4-5\sqrt{2})$ c) $(\sqrt{2}+3)(4-2\sqrt{2})$ d) $(2+\sqrt{3})^2$

9. Usuń niewymierność w mianowniku a) $\frac{1+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ a) $\frac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$

10. Narysuj na osi liczbowej przedziały

a) $A=(1,6)$ b) $B=(-1,10)$ c) $C=(-6,3)$ d) $D=(-1,\infty)$

11. Oblicz $|-4|$, $|3-13|$, $|2-8+1|$,

12. Narysuj na osi liczbowej zbiory liczb spełniających warunki: a) $x < 4$ b) $x > 7$

c) $-2 < x < 5$. Zapisz to w postaci przedziałów.

13..Rozwiąż równanie; a) $5x+6=21$ b) $4x - 5 = 2x + 17$, c) $5(x - 3) + 7 = 3x + 12$,

d) $\frac{1}{2}x - 3 = 1$ e) $2(x-1)+3(x+2)=26$; f) $(x - 2)(x + 3) + 2 = (x + 3)^2 + 2 - 4x$

14. Rozwiąż nierówność: $4x-2<14$; $3(x-1)+2>18$; $4x+3\leq 2x+21$; $2(x-1)+3(x+2)>26$;

15. Rozwiąż układ nierówności $\begin{cases} x + 4 > 1 \\ 2x < 8 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x - 4 < 11 \\ x + 3 > 5 \end{cases}$

16. Oblicz 19% podatku od zarobku 1200zł.

17. Anna zarobiła 2500zł i dostała premię, która wynosiła 30% zarobku . Ile wynosi premia?

18. Znajdź liczbę, która jest większa: a) o 20% od liczby 80 b) o 40% od liczby 200

19. Liczba a stanowi 25% liczby b . Jakim procentem liczby a jest liczba b ?

20. Anna złożyła w banku 2500zł na oprocentowanie roczne 3% . Ile pieniędzy będzie miała po roku?

21. Jan kupił telewizor na raty. Pierwsza rata w wysokości 720 zł stanowiła 30% całej wpłaty. Jaka była cena TV?

22. Inflacja wynosząca 21% wzrosła o 4 punkty procentowe. Ile wynosi teraz?

23. Która z danych liczb jest przybliżeniem dziesiętnym liczby 7,687986

A. 7,6 B. 7,68 C. 7,688 D. 7,6879

24. Liczbę 12,5 zaokrąglono do całości. Wskaż błąd względny tego przybliżenia.

25. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych , gdy a) $\sin \alpha = \frac{2}{3}$, b) $\cos \alpha = \frac{2}{5}$, c) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{4}$

26. Oblicz: a) $4\sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ - 3\operatorname{tg} 45^\circ$, b) $\sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ$, c) $(\sin 30^\circ \operatorname{tg} 60^\circ + \cos 30^\circ) \operatorname{tg} 60^\circ$

27. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych mniejszego kąta trójkąta prostokątnego o przeciwprostokątnej 13 i przyprostokątnej 5.

28. Uprość wyrażenie stosując związki trygonometryczne

a) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2$,

b) $(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \cdot \cos^2 \alpha - 4$

c) $\operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha$