TEMAT: CIĄG GEOMETRYCZNY (semestr IV-7)

Ciągiem geometrycznym nazywamy ciąg o co najmniej trzech wyrazach, w którym każdy wyraz, oprócz pierwszego, powstaje przez pomnożenie wyrazu poprzedniego przez stałą liczbę q .

q - **iloraz ciągu** geometrycznego

1. Czy podany ciąg jest geometryczny:
- **a.** 2, 10, 50, 250, 1250
- **b.** 1, 2, – 4, – 8, 16
- **c.** 1, – 2, 4, – 8, 16, – 32
- **d.** 2, 10, 50, 250, 1250
- **e.** $\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$, $3\sqrt{3}$,$4\sqrt{3}$, $5\sqrt{3}$
- **f.** $\sqrt{2}$, 2, $2\sqrt{2}$, 4, $4\sqrt{2}$

2. Mając dane dwa pierwsze wyrazy ciągu geometrycznego, wyznacz trzy kolejne.

a. $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ **b.** 1, 4 **c.** $\sqrt{5}$, $2\sqrt{5}$ **d.** $\sqrt{3}$, 3 **e.** 1, – 2

3. W pewnym doświadczeniu bakterie podwajają swoją liczebność co 3 godziny. Jeżeli na początku było ich k, to ile będzie bakterii po 3 h, 6h, 9h, … po kolejnych trzygodzinnych okresach?

4. W miejsce x, y wstaw takie liczby, aby ciąg (3, 6, x, 24, 48, y) był geometryczny.

5. Wypisz pięć kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego, jeśli:

a. a_1 = -7 , q = 1 **c.** a_1 = 80 , q = $\frac{1}{2}$

b. a_1 = -1 , q = $\frac{1}{3}$ **d.** a_1 = 2 , q = -3

Wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q ma postać:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

6. Pewien wirus komputerowy przenosi się za pośrednictwem poczty elektronicznej. Przyjmijmy, że każdy, kto dostał zainfekowaną wiadomość, prześle ją swoim trzem znajomym posiadającym „zdrowe" komputery.

Określ liczbę zarażonych komputerów w kolejnych krokach: 1, …………………………………………………………………… .

Oblicz dwudziesty wyraz tego ciągu: a_{20} = ……………………………………………………………………………………… .

7. Wyznacz szósty wyraz ciągu geometrycznego (a_n) , jeżeli a_1 = 3 , q = 2.

8. Wyznacz czwarty wyraz ciągu geometrycznego (a_n) , jeżeli a_1 = $2\sqrt{3}$, q = $\frac{1}{2}$.

9. Wyznacz trzeci wyraz ciągu geometrycznego (a_n) , jeżeli a_1 = -100 , q = 0,1.

10. Podaj ogólny wzór ciągu geometrycznego (a_n) , jeżeli a_1 = 3 , a_6 = 96.

11. Wyznacz taką liczbę dodatnią x, aby ciąg 5, x, 75 był ciągiem geometrycznym.

12. Wyznacz taką liczbę x, aby ciąg 4, x, 25 był ciągiem geometrycznym.

Dla trzech kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego, gdy n > 1, prawdziwa jest równość:

$$a_n^{\ 2} = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

13. Wyznacz taką liczbę *x*, aby liczby $x + 3$, 5, 10 tworzyły ciąg geometryczny.

14. Wyznacz taką liczbę *x*, aby liczby $x – 2$, x, x + 4 tworzyły ciąg geometryczny.

15. Między liczby 16 i 1024 wstaw takie liczby x i y, aby ciąg 16, x, y, 1024 był ciągiem geometrycznym.

16. Wyznacz wyraz a_1 i iloraz q ciągu geometrycznego (a_n) , wiedząc, że wyraz trzeci jest równy 6, a siódmy 96.

17. Oblicz dziewiąty wyraz ciągu geometrycznego, wiedząc, że wyraz piąty tego ciągu jest równy 5, Natomiast wyrazy szósty i siódmy są równe.

18. Trzy liczby są kolejnymi wyrazami rosnącego ciągu geometrycznego. Wyznacz te liczby, jeżeli wiadomo, że suma pierwszej i trzeciej jest równa 20, a kwadrat drugiej jest równy 36.

19. Liczby: m – 6, m + 3, m + 5 tworzą ciąg geometryczny. Oblicz m. Wyznacz wyrazy tego ciągu.

20. Wyznacz x i y ciągu geometrycznego: $a)\ 2,\ x,\ \frac{9}{2},\ y,\ \frac{81}{8}$ $b)\ x,\ y, 108,\ 324$

21. W ciągu geometrycznym $a_2 = 1$ i $a_3 = 2$. Oblicz q i a_1 .

22. Czy ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = 2^n$ jest ciągiem geometrycznym?

23. Duży arkusz papieru o grubości 0,1mm został złożony na pół, a potem jeszcze raz na pół, ponownie na pół itd. Oblicz hipotetyczną grubość złożonego papieru po 30 złożeniach.

Temat: Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego. (semestr IV-7)

....

Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q wyraża się wzorem:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \qquad \text{dla } q \neq 1$$

$$S_n = n \cdot a_1 \qquad \text{dla q = 1}$$

....

ZADANIA

1. Oblicz sumę pięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n), w którym a_1 = 6 i iloraz q = -3.

2. Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n), w którym a_1 = 8 i iloraz q = 1.

3. Oblicz sumę stu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n), w którym $a_1 = \frac{1}{2}$ i iloraz q = -1.

4. W ciągu geometrycznym, w którym a_1 = -2 i iloraz $q = \frac{1}{3}$ suma n początkowych wyrazów $S_n = -\frac{80}{27}$.

Oblicz n.

5. Zgodnie z legendą bramin, który wynalazł szachy, zażądał od szacha perskiego tyle ziaren pszenicy, ile znajdzie się na szachownicy, jeśli zostanie pokryta zgodnie z zasadą: na pierwszym polu jedno ziarno, na drugim dwa, na trzecim cztery itd., czyli na każdym następnym dwa razy więcej niż na poprzednim. Ponieważ szachownica ma 64 pola, więc liczba ziaren jest sumą 64 wyrazów ciągu geometrycznego, w którym pierwszy wyraz jest równy a_1 = ... , a iloraz q = ... Oblicz S_{64}.

S_{64} = ...

Oblicz wagę tego ziarna, jeśli jedno ziarno ma masę ok. 0,03 g.

M = ...

Dla porównania na świecie zbiera się obecnie co roku ok. 600 milionów ton pszenicy.

6. Oblicz sumę skończonego ciągu geometrycznego.

a. $3, 3^2, 3^3, \ldots, 3^6$

b. $6, 3, \ldots, \frac{3}{8}$

c. $\sqrt{3}, 3, \ldots, 27$

d. π, 2π, … , 16π,

7. Trzeci wyraz ciągu geometrycznego równa się 45, a szósty wynosi 1215. Znajdź sumę ośmiu pierwszych wyrazów tego ciągu.

8. Drugi wyraz malejącego ciągu geometrycznego równa się 20, a czwarty wynosi 5. Znajdź sumę dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu.

9. W skończonym ciągu geometrycznym pierwszy wyraz jest równy (-3), a ostatni (- 1536). Wiedząc, że suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa (-3069), wyznacz:

a. Iloraz tego ciągu

b. Liczbę wyrazów tego ciągu.

10. Przyznano kilka nagród, których wartość wynosiła 14 760 zł. Pierwsza nagroda wynosiła 5 000 zł, a każda następna była pewnym stałym ułamkiem poprzedniej. Oblicz ile było nagród i jaką wartość miała każda nagroda, jeśli ostatnia wynosiła 2560 zł.