

Poznamy trzy funkcje trygonometryczne: sinus, cosinus, tangens.

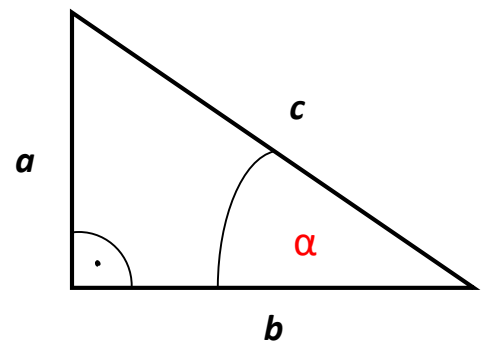
Funkcje te przyporządkowują kątowi stosunek długości odpowiednich boków.

Dla kątów ostrych funkcje trygonometryczne można zdefiniować w trójkącie prostokątnym jako stosunki długości odpowiednich boków.

DEFINICJE FUNKCJI TRYGNOMETRYCZNYCH:

Sinusem kąta ostrego α (zapisujemy: $\sin \alpha$) nazywamy stosunek przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta α do przeciwprostokątnej.

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$



Cosinusem kąta ostrego α (zapisujemy: $\cos \alpha$) nazywamy stosunek przyprostokątnej leżącej przy kącie α do przeciwprostokątnej.

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

Tangensem kąta ostrego α (zapisujemy: $\text{tg } \alpha$), nazywamy stosunek przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta α do przyprostokątnej leżącej przy kącie α .

$$\text{tg } \alpha = \frac{a}{b}$$

Wartości funkcji trygonometrycznych odpowiednich kątów odczytujemy w tablicach.

PRZYKŁAD 1. Odczytaj z tablic wartości funkcji trygonometrycznych i wpisz je w miejsce kropek.

$\cos 37^\circ = 0.7986$ - sposób wyznaczenia wartości ilustrują strzałki na tablicy poniżej

$\sin 40^\circ = \dots\dots\dots$, $\cos 17^\circ = \dots\dots\dots$, $\text{tg } 29^\circ = \dots\dots\dots$

$\sin 21^\circ = \dots\dots\dots$, $\cos 39^\circ = \dots\dots\dots$, $\text{tg } 15^\circ = \dots\dots\dots$

Fragment tablic wartości funkcji trygonometrycznych

α $\sin \alpha$ $\cos \alpha$ $\operatorname{tg} \alpha$

15°	0.2588	0.9659	0.2679
16°	0.2756	0.9613	0.2867
17°	0.2924	0.9563	0.3057
18°	0.309	0.9511	0.3249
19°	0.3256	0.9455	0.3443
20°	0.342	0.9397	0.364
21°	0.3584	0.9336	0.3839
22°	0.3746	0.9272	0.404
23°	0.3907	0.9205	0.4245
24°	0.4067	0.9135	0.4452
25°	0.4226	0.9063	0.4663
26°	0.4384	0.8988	0.4877
27°	0.454	0.891	0.5095

α $\sin \alpha$ $\cos \alpha$ $\operatorname{tg} \alpha$

28°	0.4695	0.8829	0.5317
29°	0.4848	0.8746	0.5543
30°	0.5	0.866	0.5774
31°	0.515	0.8572	0.6009
32°	0.5299	0.848	0.6249
33°	0.5446	0.8387	0.6494
34°	0.5592	0.829	0.6745
35°	0.5736	0.8192	0.7002
36°	0.5878	0.809	0.7265
37°	0.6018	0.7986	0.7536
38°	0.6157	0.788	0.7813
39°	0.6293	0.7771	0.8098
40°	0.6428	0.766	0.8391

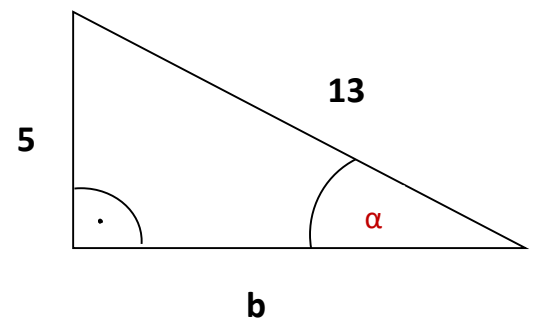
PRZYKŁAD 2. Obliczmy wartości funkcji trygonometrycznych kąta α zaznaczonego na rysunku.

- Obliczmy b z twierdzenia Pitagorasa:

$$b^2 + 5^2 = 13^2 \quad b^2 = 144$$

$$b^2 = 13^2 - 5^2 \quad \mathbf{b = 12} \quad (b > 0)$$

$$b^2 = 169 - 25$$



Łatwo teraz obliczyć wartości funkcji trygonometrycznych wykorzystując ich definicje:

$$\sin \alpha = \frac{5}{13}, \quad \cos \alpha = \frac{12}{13}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12},$$

PRZYKŁAD 3. Lina podtrzymująca maszt jest umocowana w odległości 12 m od podstawy masztu i jest nachylona do powierzchni ziemi pod kątem 53° . Określmy wysokość masztu (z dokład. do całości).

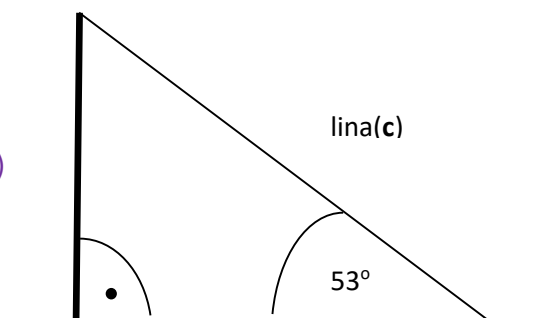
$$b = 12 \text{ m}, \alpha = 53^\circ, a = ?$$

Z definicji tangensa, mamy: $\operatorname{tg} 53^\circ = \frac{a}{b}$

Pod b podstawmy 12 (m) i odczytujemy z tablic $\operatorname{tg} 53^\circ = 1,327$ i też podstawiamy:

$$1,327 = \frac{a}{12} \Rightarrow a = 1,327 \cdot 12 \Rightarrow a = 15,924 \approx 16 \text{ (m)}$$

maszt(a=?)



Odległość liny od podstawy masztu(b=12)

Odp. Maszt ma wysokość w przybliżeniu równą 16 m.

PRZYKŁAD 4. Rozwiążmy trójkąt prostokątny, mając dane: $a = 15$ oraz $\alpha = 37^\circ$.

Rozwiązać trójkąt prostokątny to znaczy obliczyć długości wszystkich jego boków i miary wszystkich jego kątów.

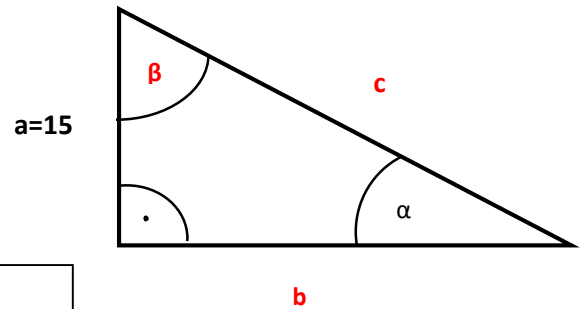
Mamy wyznaczyć miarę kąta β oraz długości boków b i c .

Wyznaczymy miarę kąta β :

$$\beta = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 37^\circ = 53^\circ$$

Z definicji funkcji trygonometrycznych obliczymy długości boków:

$\sin \alpha = \frac{a}{c}$ $0,6 \approx \frac{15}{c}$ $c \approx \frac{15}{0,6}$ $c \approx 25$	$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$ $0,75 \approx \frac{15}{b}$ $b \approx \frac{15}{0,75}$ $b \approx 20$
--	---



Odp. Szukane wielkości są równe: $\beta = 53^\circ$, $b \approx 20$, $c \approx 25$.

WARTOŚCI FUNKCJI TRYGNOMETRYCZNYCH DLA KĄTÓW 30° , 45° , 60°

Kąty 30° i 60° znajdują się w trójkącie prostokątnym otrzymanym przez podział trójkąta równobocznego wysokością. W celu ułatwienia obliczeń przyjmijmy, że bok tego trójkąta ma długość 2.

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

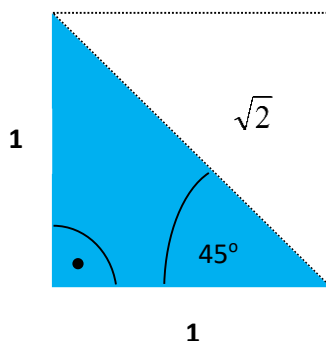
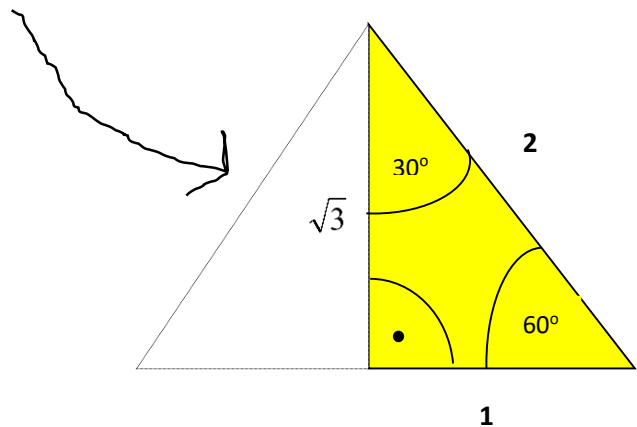
$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30^\circ =$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$$



Jeżeli w kwadracie o boku 1 narysujemy przekątną, to otrzymamy dwa trójkąty prostokątne równoramienne, w których kąty ostre mają po 45° .

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{tg} 45^\circ = 1$$

Wyniki możemy przedstawić w tabelce:

α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

PRZYKŁAD 5. Obliczmy: $\cos 60^\circ \cdot \sin 30^\circ - \cos 30^\circ \cdot \sin 60^\circ$

$$\cos 60^\circ \cdot \sin 30^\circ - \cos 30^\circ \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

ZADANIA DO SAMODZIELNEGO ROZWIĄZANIA!

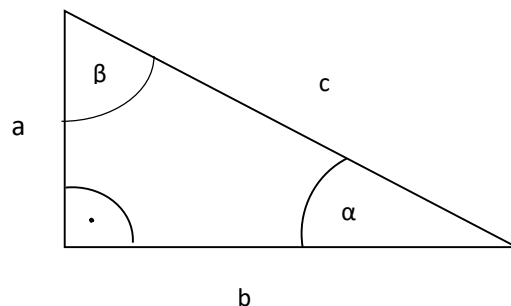
Zad.1. Oblicz :

a. $(\operatorname{tg} 60^\circ - \cos 60^\circ)(\operatorname{tg} 30^\circ + \cos 30^\circ)$

b. $6 \cdot (\sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ \cdot \operatorname{ctg} 60^\circ) : (\operatorname{ctg} 30^\circ \cdot \sin 45^\circ)$

Zad.2. Rozwiąż trójkąt prostokątny, mając dane:

- a) $b = 12$ i $\beta = 40^\circ$
b) $c = 30$ i $\alpha = 60^\circ$
c) $a = 10$ i $c = 16$



Zad.3. Oblicz kąt ostry trapezu prostokątnego ABCD, w którym dane są podstawy $IABI = 17 \text{ cm}$ i $ICDI = 11 \text{ cm}$ oraz wysokość $ICDI = 8 \text{ cm}$.

ŹRÓDŁA:

Marcin Kurczab, Elżbieta Kurczab, Elżbieta Świda - Matematyka. Podręcznik do liceów i techników. Klasa 1
Oficyna Edukacyjna Krzysztof Pazdro – Warszawa 2012

Marcin Kurczab, Elżbieta Kurczab, Elżbieta Świda - Matematyka. Zbiór zadań do liceów i techników. Klasa 1.
Oficyna Edukacyjna Krzysztof Pazdro – Warszawa 2012

<http://www.matemaks.pl>

http://www.matmana6.pl/zdjecia/szkola_srednia/trygonometria/funkcje_trygonometryczne_w_trojkatcie_prostokatnym_4.png

<http://www.math.edu.pl/wartosci-funkcji-trygonometrycznych>

<http://www.womkat.edu.pl/files/standaryzacja/grupa18/amiera/tabela2.jpg>